Proceedings of IAM, V.2, N.2, 2013, pp.187-195

# О ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ СОБОЛЕВА

**Ш. М. Насибов[1], М. А. Намазов[1]**

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

**Резюме.** В настоящей заметке получены некоторые оценки наилучшей константы в одном неравенстве Гальярдо-Ниренберга-Соболева.

**Ключевые слова:** наилучшая константа, неравенство Соболева, интерполяционное неравенство, оценки наилучшей константы.

**AMS Subject Classification:** 35Q70, 39B72.

## 1. Введение

Вычисление наилучшей константы в интерполяционном неравенстве Гальярдо-Ниренбурга-Соболева приводит к решению нелинейного уравнения эллиптического типа, что является сложной задачей. Поэтому получение априорных оценок наилучшей константы является актуальным.

## 2. Интегральное неравенство

Для удобства дальнейшего изложения примем следующие обозначения: $\|u\|_p = \left\{ \int_{R^n} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$, $p \ge 1$, -норма в $L_p(R^n)$, индекс $p$ в $\|\cdot\|_p$ будем опускать при $p = 2$, т.е. будем писать $\|\cdot\|$. Для заданного ° из интервала $(0, °_0)$, где $°_0 = +\infty$ при $n = 1,2$, $°_0 = 4/(n-2)$ при $n \ge 3$, определим $\sim\, = 0{,}5°n/(° + 2)$. Для заданного $\sim\, \in (0,1)$ определим $¡ = \sqrt{\sim^{\sim}(1-\sim)^{1-\sim}}$.

Пусть

$$\forall ¯ > 0 \quad \Gamma(¯) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{¯-1} dt,$$

гамма –функция Эйлера;

$$\forall \ \ > 0, \forall ¥ > 0 \quad B( \ ,¥) = \int_0^1 t^{\ -1}(1-t)^{¥-1} dt,$$

-бета- функция Эйлера, $±_n = 2®^{n/2}/\Gamma(n/2)$,

$$K_g(\sim) = ¡^{-1}\left[0{,}5±_n B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\sim)}{2\sim}\right)\right]^{\sim/n} = ¡^{-1}®^{\sim/2}\left[\frac{\Gamma[(n-n\sim)/2\sim]}{\Gamma(n/2\sim)}\right]^{\sim/n}. \quad (1)$$

**Лемма 1.** Пусть $°,\sim$ - определенные выше числа, $¬(x)\in L_2(R^n)$, $r¬ \in L_2(R^n)$, $r=|x|$. Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство:

$$\|\vdash\|_{(°+2)/(°+1)} \le K_g(\sim)\|r¬\|^{\sim}\|\vdash\|^{1-\sim}, \quad (2)$$

где $K_g(\sim)$ - константа, определенная формулой (1).

Константа $K_g$ является точной: неравенство (2) переходит в равенство при $¬(x)=¬_0(r)=µ_1/(µ_2+µ_3 r^2)^{1+1/°}$, где $µ_1,µ_2,µ_3$ – произвольные положительные числа.

**Доказательство.** Пусть $a,b$ -пока не определенные положительные числа. Применяя неравенство Гельдера-Юнга для интегралов, имеем

$$\|\vdash\|_p^p = \int_{R^n}|\vdash|^p dx = \int_{R^n}\left[\left(|\vdash|\sqrt{a+br^2}\right)^p\frac{1}{\sqrt{(a+br^2)^p}}\right]dx \le$$

$$\le\left(a\int_{R^n}|\vdash|^2dx + b\int_{R^n}r^2|\vdash|^2dx\right)^{p/2}\left(\int_{R^n}\frac{dx}{(a+br^2)^{1+2/°}}\right)^{°/2(°+1)},$$

здесь $p=(°+2)/(°+1)$. Выберем $b$, полагая $b=\|\vdash\|^2/\|r¬\|^2$, и вычислим интеграл

$$I_0 = \int_{R^n}\frac{ax}{(a+br^2)^{1+2/°}}.$$

После подстановки $x=\frac{\sqrt{a}t}{\sqrt{b}}$ для $I_0$ получаем, $I_0 = I_1/a^{[4-(n-2)°]/2°}b^{n/2}$, где

$$I_1 = \int_{R^n}(1+|t|^2)^{-1-2/°}dt = ±_n\int_0^\infty\frac{¶^{n-1}d¶}{(1+¶^2)^{1+2/°}} = \frac{±_n B}{2},\quad B = B\left[\frac{n}{2},\frac{n(1-\sim)}{2\sim}\right].$$

Из приведенных выше оценок для $\|\vdash\|_p$ получаем следующее неравенство:

$$\|\vdash\|_p \le \sqrt{\frac{1+a}{a^{1-\sim}}}(0{,}5±_n B)^{\sim/n}\|ru\|^{\sim}\|u\|^{1-\sim}.$$

Функция $f(a)=(1+a)/a^{1-\sim}$, $0<a<+\infty$, в точке $a_0=(1-\sim)/\sim$ имеет минимум, равный $f(a_0)=1/\sim^{\sim}(1-\sim)^{1-\sim}$. В последнем неравенстве полагая $a=a_0$, получим неравенство (2) с константой $K_g$, определенной формулой (1). Остается показать, что $K_g$ в неравенстве (2) является оптимальной константой. Предварительно проверив, что

$$\int_0^\infty \frac{t^{«-1}\sim t}{(\mu_2+\mu_3 t^2)^{¢}}=\frac{B(«/2, ¢-«/2)}{2\mu_2^{¢-«/2}\mu_3^{«/2}}, \text{ где } «>0,\ ¢>\frac{«}{2},$$

вычислим для $¬_0=\mu_1/(\mu_2+\mu_2 r^2)^{1+1/°}$ нормы $\|\vdash_0\|, \|r¬_0\|, \|\vdash_0\|_p$, $p=(°+2)/(°+1)$. Легко показать, что

1) $\|\vdash_0\|_{(°+2)/(°+1)}=\dfrac{\mu_1(0{,}5\pm_n B)^{1/2+\sim/n}}{\left[\mu_2^{n(1-\sim)/2\sim}\mu_3^{n/2}\right]^{(n+2\sim)/2n}}$;

2) $\|\vdash_0\|=\dfrac{\mu_1\sqrt{1-\sim}\,(0{,}5\pm_n B)^{1/2}}{\left[\mu_2^{1+n(1-\sim)/2\sim}\mu_3^{n/2}\right]^{1/2}}$;

3) $\|r¬_0\|=\dfrac{\mu_1\sqrt{\sim}\,(0{,}5\pm_n B)^{1/2}}{\left[\mu_2^{n(1-\sim)/2\sim}\mu_3^{1+n/2}\right]^{1/2}}$.

Учтя эти интегралы в нестрогом неравенство (2), легко убедится, что оно переходит в равенство при $K_g$, определенной формулой (1).

Лемма 1 полностью доказана.

### 3. Неравенство Хаусдорфа –Юнга

**Лемма 2.** Пусть $\hat{u}(¶)=(2®)^{n/2}\int_{R^n} e^{-i(x,¶)}u(x)dx,\ ¶\in R^n$ преобразование Фурье функции $u(x)$. Тогда справедливо следующее неравенство Хаусдорфа –Юнга

$$\|f\|p'\le K_Б(p)\|\hat{f}\|_p,\quad K_Б(p)=\left[\left(\frac{p}{2®}\right)^{1/p}\left(\frac{p'}{2®}\right)^{-1/p'}\right]^{n/2},$$

$1\le p\le 2,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ с наилучшей константой Бекнера-Бабенко [1-4].

### 4. Результаты

**Теорема 1.** Пусть $u(x) \in H^1(R^n)$, где $H^1(R^n) \equiv W_2^1(R^n)$ пространство Соболева. Пусть $\circ, \sim$ выше определенные числа, $K_g(\sim)$ определено формулой (1). Тогда справедливо следующее мультипликативное неравенство Гальярдо-Ниренберга-Соболева

$$\|u\|_{\circ+2} \le \overline{K}_0 \|\nabla u\|^{\sim} \|u\|^{1-\sim}. \tag{3}$$

Здесь $\overline{K}_0 = K_g(\sim) K_Б \left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)$; $\|\cdot\|_q, \|\cdot\|$ - нормы соответственно в $L_q(R^n)$, $q \ge 1$ и в $L_2(R^n)$.

**Доказательство.** По неравенству Хаусдорфа- Юнга имеем

$$\|u\|_{\circ+2} \le K_Б \left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right) \|\hat{u}\|_{\frac{\circ+2}{\circ+1}}. \tag{4}$$

Далее в силу неравенства (2) заключаем, что

$$\|\hat{u}\|_{\frac{\circ+2}{\circ+1}} \le K_g(\sim) \| ¶ |\hat{u}| \|^{\sim} \|u\|^{1-\sim}. \tag{5}$$

Но в силу теорем Планшереля –Парсеваля имеем

$$\| ¶ |\hat{u}| \| = \|\nabla u\|, \ \|\hat{u}\| = \|u\|. \tag{6}$$

Теперь из (4), (5) и (6) следует (3).

Уточним точность константы $\overline{K}_0$ в (3). В [5] доказано, что для наилучшей константы в неравенства (3) справедливо соотношение

$$K_0 = \frac{1}{\text{i}} \left( \frac{1-\sim}{\|\cdot_0\|^2} \right)^{\sim/n}, \tag{7}$$

где $\cdot_0$-положительное, радиально-симметричное (при $n \ge 2$) и монотонное убывающее решение уравнения

$$\Delta \cdot_0 - \cdot_0 + \cdot_0^{\circ+1} = 0 \text{ в } H^1(R^n), \tag{8}$$

с минимальной нормой (основное состояние).

Из (8) для $\cdot_0$ - имеем представление

$$\cdot_0 = G * \cdot_0^{\circ+1} = \int_{R^n} G(x - ¶) \cdot_0^{\circ+1}(¶) d¶, \tag{9}$$

где

$$G(|x|) = K_{(n-2)/2}(|x|) / |x|^{(n-2)/2},$$

$K_{(n-2)/2}(|x|)$ функция Макдональда, $n \ge 2$,

$$\hat{G}=\frac{1}{1+|\P|^{2}};$$

Для функции $g(x)=P*h$ справедлива оценка [см.1]

$$\|P*h\|_{r}\le K_{Б}(p)K_{Б}(q)K_{Б}(r')\|P\|_{p}\|h\|_{q}\,, \tag{10}$$

где $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\ r,p,q\ge 1$.

Применим оценку (10) к (9) полагая $r=\circ+2,\ p=\frac{\circ+2}{2},\ q=\frac{\circ+2}{\circ+1}$.

Имеем

$$\|\cdot\ _0\|_{\circ+2}=\left\|G*\cdot\ _0^{\circ+1}\right\|_{\circ+2}\le K_{Б}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)K_{Б}^{2}\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}\|\cdot\ _0\|_{\circ+2}^{\circ+1}.$$

Отсюда

$$\|\cdot\ _0\|_{\circ+2}^{\circ+2}\ge\left(\frac{1}{K_{Б}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)K_{Б}^{2}\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}}\right)^{1+2/\circ}. \tag{11}$$

Но для $\cdot\ _0$ справедливо соотношение [5]

$$\|\cdot\ _0\|_{\circ+2}^{\circ+2}=\frac{1}{1-\sim}\|\cdot\ _0\|^{2}\ . \tag{12}$$

Из (7), (11), (12) получаем, что

$$K_0\le\overline{\overline{K}}_0=\frac{1}{\text{¡}}\sqrt{K_{Б}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)K_{Б}^{2}\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}}\ . \tag{13}$$

Покажем, что

$$\overline{\overline{K}}_0\le\overline{K}_0\quad\text{при}\quad\circ\ge 2. \tag{14}$$

По неравенству Хаусдорфа-Юнга имеем

$$\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}\le K_{Б}\left(\frac{\circ+2}{\circ}\right)\|FG\|_{\frac{\circ+2}{\circ}}\quad\text{при}\quad\circ\ge 2\ . \tag{15}$$

$$\|FG\|_{\frac{\circ+2}{\circ}}^{\frac{\circ+2}{\circ}}=\pm_n\int_0^{\infty}\frac{t^{n-1}at}{(1+t^2)^{1+2/\circ}}=\frac{\pm_n}{2}B\left(\frac{n}{2},\frac{\circ+2}{\circ}-\frac{n}{2}\right)=\frac{\pm_n}{2}B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\sim)}{2\sim}\right)\ ,$$

$$\sqrt{\|FG\|_{\frac{\circ+2}{\circ}}}=\left(\frac{\pm_n}{2}B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\sim)}{2\sim}\right)\right)^{\sim/n}. \tag{16}$$

Здесь $FG=\hat{G}$.

Из (13), (15), (16) следует (14), т.е.

$$\overline{\overline{K}}_0 \le \frac{K_Б\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)}{\text{i}}\left(\frac{\pm_n}{2}B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\sim)}{2\sim}\right)\right)^{\sim/n} = \overline{K}_0 \,.$$

Теперь покажем, что

$$\overline{K}_0 \le \overline{\overline{K}}_0 \text{ при } 0<\circ\le 2\,. \tag{17}$$

имеем

$$\overline{K}_0 = \frac{K_Б\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)}{\text{i}}\left(\frac{\pm_n}{2}B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\sim)}{2\sim}\right)\right)^{\sim/n} = \frac{1}{\text{i}}K_Б\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\sqrt{\left\|\frac{1}{1+|x|^2}\right\|_{\frac{\circ+2}{\circ}}}\,. \tag{18}$$

Но по неравенству Хаусдорфа-Юнга заключаем, что при $0<\circ\le 2$

$$\left\|\frac{1}{1+|x|^2}\right\|_{\frac{\circ+2}{\circ}} \le K_Б\left(\frac{\circ+2}{2}\right)\left\|F\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)\right\|_{\frac{\circ+2}{2}}\,. \tag{19}$$

Из (18), (19) следует (17), т.е. при $0<\circ\le 2$

$$\overline{K}_0 \le \frac{1}{\text{i}}K_Б\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\sqrt{K_Б\left(\frac{\circ+2}{2}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}} = \overline{\overline{K}}_0\,.$$

Дадим одно прямое доказательство оценки $K_0 \le \overline{\overline{K}}_0$.

Имеем $\int\limits_{R^n} u\overline{\text{g}}\,dx = \int\limits_{R^n}\hat{u}\overline{\hat{\text{g}}}\,dx = \int\limits_{R^n}\hat{u}\sqrt{1+\P^2}\,\frac{\overline{\hat{\text{g}}}}{\sqrt{1+\P^2}}$ (по неравенству Коши-Буняковского)

$$\le \sqrt{\int\limits_{R^n}|\hat{u}|^2\left(1+\P^2\right)}\sqrt{\int\limits_{R^n}\frac{|\hat{\text{g}}|^2}{1+\P^2}d\P}\,. \tag{20}$$

Но

$$\int\limits_{R^n}\frac{|\text{g}|^2}{1+\P^2}d\P = \int\limits_{R^n}\text{g}(x)\left(\int\limits_{R^n}G(x-y)\text{g}(y)du\right)dx\,,$$

где $\hat{G}=\frac{1}{1+\P^2}$. Оценим последний интеграл по неравенству Гелдера

$$\int\limits_{R^n}\text{g}(x)\left(\int\limits_{R^n}G(x-y)\text{g}(y)dy\right)dx \le \|\text{g}\|_r\left\|\int\limits_{R^n}G(x-y)\text{g}(y)dy\right\|_m\,, \tag{21}$$

$\frac{1}{r}+\frac{1}{m}=1,\ r\ge 1,\ m\ge 1.$

Но справедлива оценка [1]

$$\left\|\int_{R^n} G(x-y)\mathrm{g}(y)dy\right\|_m \le K_{\text{Б}}(p)K_{\text{Б}}(q)K_{\text{Б}}(m')\|G\|_p\|\mathrm{g}\|_q,$$

Выберем $r=\frac{\circ+2}{\circ+1},\ m=\circ+2,\ p=\frac{\circ+2}{2},\ q=\frac{\circ+2}{\circ+1}.$

Тогда

$$\left\|\int_{R^n}G(x-y)\mathrm{g}(y)dy\right\|_{\circ+2} \le K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)K_{\text{Б}}^2\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}\|\mathrm{g}\|_{\frac{\circ+2}{\circ+1}}. \quad (22)$$

Из (20), (21), (22) следует

$$\int u\overline{\mathrm{g}}\,dx \le \|u\|_{H^1}\sqrt{\|\mathrm{g}\|_{\frac{\circ+2}{\circ+1}} K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)K_{\text{Б}}^2\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}\|\mathrm{g}\|_{\frac{\circ+2}{\circ+1}}} =$$

.

$$=\|u\|_{H^1}K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\sqrt{K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}}\ \ \|\mathrm{g}\|_{\frac{\circ+2}{\circ+1}}.$$

В последнем интеграле полагая $\mathrm{g}=|u|^\circ$ получим

$$\|u\|_{\circ+2}\le\|u\|_{H^1}K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\sqrt{K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}}\ . \qquad (23)$$

(23) перепишем в виде

$\|u\|_{\circ+2}\le C_0\sqrt{A+a}$, где $C_0=K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{\circ+1}\right)\sqrt{K_{\text{Б}}\left(\frac{\circ+2}{2}\right)\|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}}$ ,

$$A=\|\nabla u\|^2=\sum_{k=1}^{n}\int\left|\frac{\partial u(x_k)}{\partial x_k}\right|^2dx\ ,\ a=\|u\|^2=\int_{R^n}|u(x)|^2dx,$$

$$\|u\|_{\circ+2}=\left(\int_{R^n}|u(x)|^{\circ+2}dx\right)^{1/\circ+2}.$$

Положим $u=u(\mathrm{a}x),\ \mathrm{a}>0$. Тогда получим

$$\frac{\|u\|_{\circ+2}}{\mathrm{a}^{n/\circ+2}}\le C_0\sqrt{\mathrm{a}^{2-n}A+\mathrm{a}^{-n}a}\ ,\quad \|u\|_{\circ+2}\le C_0\sqrt{\mathrm{a}^{\frac{4-\circ(n-2)}{\circ+2}}A+\frac{1}{\mathrm{a}^{\frac{n\circ}{\circ+2}}}a}$$

Очевидно, что функция $f(x) = Ax^p + \frac{a}{x^q}$, где $p,q > 0$ достигает своего минимума в точке $x_0 = (qa / pA)^{1/p+q}$, равного

$$\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{p/p+q} + \left(\frac{p}{q}\right)\right] A^{\frac{q}{p+q}} a^{\frac{p}{p+q}} .$$

Применим этот факт к функции $f(x) = \mathrm{a}^{\frac{4-\circ(n-2)}{\circ+2}} A + \frac{a}{\mathrm{a}^{\frac{n\circ}{\circ+2}}}$. Принимая во внимание, что $\frac{q}{p+q} = \sim$, $\frac{p}{p+q} = 1-\sim$,

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p+q}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p+q}} = \left(\frac{\sim}{1-\sim}\right)^{1-\sim} + \left(\frac{\sim}{1-\sim}\right)^{\sim} = \frac{1}{\sim^{\sim}(1-\sim)^{1-\sim}} .$$

Получим

$$\|u\|_{\circ+2} \le C_0 \sqrt{\frac{A^{\sim} a^{1-\sim}}{\sim^{\sim}(1-\sim)^{1-\sim}}} = \frac{1}{\text{¡}} \sqrt{K_{Б}\left(\frac{\circ+2}{2}\right) K_{Б}^{2}\left(\frac{\circ+2}{2}\right) \|G\|_{\frac{\circ+2}{2}}} \|\nabla u\|^{\sim} \|\nabla u\|^{1-\sim} ,$$

Тем самым доказано, что

$$\|u\|_{\circ+2} \le \overline{\overline{K}}_0 \|\nabla u\|^{\sim} \|u\|^{1-\sim} .$$

Результаты настоящей заметки анонсированы в работе [5] автора.

## Литература


1. Бабенко К.И., Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 1961, с.531-542.
2. Beckner W, Ann. Math., 102, 1975, с.159-182.
3. Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, 2, Гармонический анализ Самосопряженность, М.:Мир,1978.
4. Lieb E.H., Loss M., Analysis, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol.14, AMS, 2001.
5. Насибов Ш.М., Докл. АН СССР, т.307, №3, 1989, с.538-542.

## BİR SOBOLEV BƏRABƏRSİZLİYİ HAQQINDA

**Ş.M. Nəsibov, M.A. Namazov**

### XÜLASƏ

İşdə bir Qilyardo-Nirenberq-Sobolev bərabərsizliyindəki ən yaxşı sabir üçün bəzi qiymətləndirmələr alınmışdır.

**Açar sözlər**: ən yaxşı sabit, Sobolev bərabərsizliyi, interpolyasion bərabrəsizlik, ən yaxşı sabitin qiymətləndirilməsi.

## ON A SOBOLEV INEQUALITY

**Sh.M. Nasibov, M.A. Namazov**

### ABSTRACT

In the work some estimations are obtained for the sharp constant in Gulyardo-Nirinbrg-Sobolev inequality.

**Keywords**: sharp constant, Sobolev inequality, interpolation inequality, sharp constant estimation.